Université D'État D'Haïti (UEH)
École Normale Supérieure (ENS)
Département des Mathématiques
Laboratoire de Mathématiques et Applications (LAMA-UEH)

Mémoire de Licence

Introduction à l'intégrale Stochastique : Intégrale d'Itô

Préparé par
Willynx VIXAMAR
Sous les directions de
Dr Edès DESTYL et Dr Kendy VALMONT

Composition du jury

Dr Jean Keveny INNOCENT	Président du jury
Enel DERISSEAU	Lecteur critique

Juillet 2023

Remerciement

Après avoir rendu grâce à Dieu de m'avoir permis d'entamer et d'achever ce projet, je tiens, avant de présenter mon travail, à remercier vivement tous ceux qui ont, de près ou de loin, contribué à rédiger ce document :

Mes sincères remerciements vont à l'égard de mes tuteurs de projet pour leur contribution à l'élaboration de ce mémoire : **Dr. Edès DESTYL et Dr Kendy VALMONT**.

Mes reconnaissances s'adressent à mes parents et mes familles pour leur soutien et leurs encouragements tout au long de ce travail.

Également j'exprime ma gratitude aux membres de la direction de l'École Normale Supérieure (ENS), à mes professeurs et aux membres du jury.

Enfin, je remercie les étudiants de la promotion et les amis spécialement **Evenson AUGUSTE** qui ont collaboré par leurs idées à ce mémoire de fin d'étude.

Résumé

Le calcul stochastique concerne les processus aléatoires évoluant au cours du temps. L'objet fondamental permettant de construire ces processus est le mouvement Brownien, ou processus de Wiener. Une manière de définir ce processus est de considérer une marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$ suivant certaines conditions. Ce processus est alors obtenu en regardant une limite de cette marche aléatoire, vue de très loin et en très accéléré. Cela revient à considérer une marche avec des pas de plus en plus petits et de plus en plus fréquents. Les trajectoires de ce processus sont continues et sont nulle part dérivables. Lorsqu'on a voulu ajouter à des équations différentielles ordinaires des perturbations aléatoires, on a été gêné par la non différentiabilité du processus de Wiener. Du coup on a commencé par construire une intégrale par rapport à ce processus, pour ensuite définir la notion d'équation différentielle stochastique.

La question qui se posait alors était de savoir si l'on pouvait donner un sens à des équations différentielles stochastiques (EDS). Comme pour les équations différentielles ordinaires, une manière de construire des solutions est de passer par une équation intégrale. Le processus de Wiener n'est pas à variation bornée, ce qui empêche d'approcher l'intégrale par une somme d'aires de rectangles, comme pour l'intégrale de Riemann : si l'on essaie de la majorer et de la minorer par de telles sommes, on n'arrive pas à garantir que les deux bornes convergent vers une limite commune.

L'idée de Kiyoshi Itô est d'approcher l'intégrale stochastique d'une fonction σ quelconque par une suite de fonctions étagées convergeant vers σ, et en passant à la limite. Il faut bien sûr s'assurer que cette limite existe, et est indépendante de la suite d'approximations choisie. Pour cela, Itô démontre la relation appelée de nos jours "Isométrie d'Itô". C'est une isométrie entre deux espaces de $\mathbb{L}^2$, dans lesquels vivent d'une part la fonction σ, et d'autre part son intégrale stochastique. Approcher par des fonction étagées est donc équivalent à approcher son intégrale stochastique par des sommes. Avec cette définition de l'intégrale, on peut faire marcher l'argument de point fixe pour montrer l'existence de solutions de l'EDS générale (sous certaines hypothèses).

« Si l'esprit d'un homme s'égare, faites-lui étudier les mathématiques car dans les démonstrations, pour peu qu'il s'écarte, il sera obligé de recommencer ».

Francis Bacon Philosophe, Scientifique (1561 - 1626)

Table des matières

Notations

$\mathbb{R}^n$: Espace réel de dimension n
$\mathbb{R}_+$: Espace des nombres réels positifs
v.a : Variable aléatoire
E : Ensemble E
A^c : Complémentaire de A
$(E, \mathcal{A})$: Espace mesurable
$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$: Espace probabilisé
$\sigma(\mathcal{C})$: Tribu engendrée par $\mathcal{C}$
$\mathcal{B}or(E)$: Tribu borélienne de E
$f : E_1 \Rightarrow E_2$: f est une fonction de E_1 vers E_2
$p.s.$: Presque sûrement, ou P-presque sûrement, ou avec probabilité 1
iid : Indépendant et identiquement distribué
$s \wedge t$: Le minimum de s et t
X_t : Processus stochastique
B_t : Mouvement brownien
$\mathbb{E}(X)$: Espérance de X
$\mathbb{V}ar(X)$: Variance de X
$E[X|Y]$: Espérance conditionnelle de X sous la condition Y
δ_{ij} : $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$
$\in$: Appartient à
$:=$: Égalité par définition
M_t : Une martingale
$n!$: n factorielle, $n! = n \times (n-1) \times ... \times 2 \times 1$
$\mathbb{L}^2$: Espace des fonctions de carré intégrable
$\lfloor x \rfloor$: Partie entière de x
C^2 : Deux fois continue et différentiable

Motivation

Une équation différentielle stochastique (EDS) est une généralisation de la notion d'équation différentielle ordinaire prenant en compte un terme de bruit blanc. Les EDS servent à modéliser des trajectoires aléatoires, par exemple les cours de bourse.
Elles servent également à décrire des phénomènes physiques très variés. Cependant, dans de nombreuses situations les phénomènes observés ne suivent que grossièrement les trajectoires des équations qui semblent devoir leur correspondre. Les causes possibles d'un tel comportement peuvent être variées : erreur de modélisation, fluctuation au cours du temps des paramètres de l'équation, présence de bruit d'observation... Dans ces situations, naturellement les approches probabilistes trouvent leur place et il peut alors être intéressant d'incorporer des termes aléatoires dans les équations différentielles ordinaires afin de prendre en compte les incertitudes précédentes. Cependant, l'introduction de ces termes aléatoires conduit à une intégration des équations qui ne correspond pas, en général, à une adaptation immédiate de la théorie classique des équations différentielles.
On cherche à résoudre des équations de la forme :

$$\frac{dX_t}{dt} = b_t(X_t) + \sigma_t(X_t)B_t \tag{1}$$

où B_t est une grandeur aléatoire, un mouvement brownien
On remplace l'équation différentielle (1.1) par une équation d'intégrale sous la forme de :

$$\underbrace{X_t = X_0 + \int_0^t b_s(X_s)\,\mathrm{d}s}_{\text{EDO}} + \underbrace{\int_0^t \sigma_s(X_s)\,\mathrm{d}B_s}_{\text{Intégrale d'Itô}} \tag{2}$$

C'est à la deuxième intégrale qu'il s'agit de donner un sens mathématique. Si $\sigma(X_s)$ était différentiable, on pourrait le faire à l'aide d'une intégration par parties, mais ce n'est en général pas le cas. Itô a donné une autre définition de l'intégrale stochastique, qui s'applique à une classe beaucoup plus vaste d'intégrants (et donne le même résultat que l'intégration par parties dans le cas différentiable).

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Quelques rappels sur les tribus

Définition 1.1
Une classe $\mathcal{A}$ de parties d'un ensemble E est appelée tribu ou σ-algèbre si

1. *elle contient E : $E \in \mathcal{A}$*

2. *elle est stable par passage au complémentaire : pour tout $A \subseteq E$, $A \in \mathcal{A} \Leftrightarrow A^C \in \mathcal{A}$*

3. *elle est stable par réunion dénombrable : si (A_n) est une famille dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$, alors $\cup_n A_n \in \mathcal{A}$*

On dit alors que $(E, \mathcal{A})$ est un espace mesurable.

1.1.1 Tribu engendré

Définition 1.2 (et proposition)

1. *l'intersection d'une collection non vide quelconque de tribus de parties de E est elle-même une tribu ;*

2. *pour toute classe $\mathcal{C}$ de parties de E, l'intersection de toutes les tribus contenant $\mathcal{C}$ est donc une tribu : elle est appelée la plus petite tribu contenant $\mathcal{C}$, ou tribu engendrée par $\mathcal{C}$, et notée $\sigma(\mathcal{C})$.*

Définition 1.3
Si E est un espace topologique, on note $\mathcal{B}or(E)$ ou $\mathcal{B}(E)$ et on appelle tribu de Borel ou tribu borélienne, la tribu engendrée par les ouverts de E, autrement dit, $\mathcal{B}(E) := \sigma\mathcal{O}(E))$. Les éléments de $\mathcal{B}(E)$ sont appelés parties boréliennes de E, ou plus simplement boréliens de E.

1.1.2 Tribus image et image réciproque

Soit $f : E_1 \Rightarrow E_2$

Proposition 1.1
Si $\mathcal{A}_2$ est une tribu sur E_2, $f^{-1}(\mathcal{A}_2) := \{f^{-1}(Y), Y \in \mathcal{A}_2\}$ est une tribu sur E_1, appelée tribu image réciproque (de $\mathcal{A}_2$ par f).

Proposition 1.2
Si $\mathcal{A}_1$ est une tribu sur E_1, $\mathcal{B} = \{Y \subseteq E_2 :| f^{-1}(Y) \in \mathcal{A}_1\}$ est une tribu sur E_2, appelée tribu image (de $\mathcal{A}_1$ par f).

Remarque
La tribu image n'est PAS $f(A_1)$ qui n'est en général pas une tribu.

Définition 1.4
Etant donnée une variable aléatoire (v.a.) X à valeurs dans un espace mesurable $(E;\varepsilon)$, on appelle tribu engendrée par X, et on la note $\sigma(X)$, la sous-tribu de $\mathcal{A}$ engendrée par l'ensemble des images réciproques de X. Il s'agit donc de la plus petite tribu sur Ω rendant X mesurable.

Définition 1.5 (Fonctions mesurables)
Une fonction $f : (E_1, \mathcal{A}_1) \to (E_2, \mathcal{A}_2)$ est dite mesurable si $f^{-1}(\mathcal{A}_2) \subseteq \mathcal{A}_1$ (c'est-a-dire : pour tout $B \in \mathcal{A}_2, f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_1$).

1.2 Espérance conditionnelle

Définition 1.6 (Cas discret)
Pour un couple de variables aléatoires discrètes, on définit la loi de probabilité conditionnelle de X, sachant que $Y = y$, pour autant que $P[Y = y] > 0$, par :

$$P_{X|Y}(x|y) = P[X = x|Y = y] = \frac{P(x, y)}{P_Y(y)} \tag{1.1}$$

Il est dès lors naturel de vouloir définir dans le cas discret l'espérance conditionnelle de X sous la condition $Y = y$, pour autant que $P_Y(y) > 0$, par :

$$E[X|Y = y] = \sum_x xP[X = x|Y = y] \tag{1.2}$$

Définition 1.7 (Cas continu)
Pour un couple de variables X et Y continues de densité $f(\bullet,\bullet)$, la densité conditionnelle de X, sachant que $Y = y$, est définie pour autant que$f_Y(y) > 0$ par :

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} \tag{1.3}$$

Il est donc naturel de définir l'espérance conditionnelle de X, dans le cas continu et sous la condition $Y = y$, par :

$$E[X|Y = y] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|Y}(x|y)dx \tag{1.4}$$

pour les valeurs de y telles que $f_Y(y) > 0$.

Comme l'espérance classique, l'espérance conditionnelle satisfait les propriétés de linéarité, de positivité, de convergences monotones et dominée mais aussi les inégalités de Jensen et de Cauchy-Schwarz, de Hölder, etc...

Théoreme 1.1 (Théorème de calcul d'espérances par conditionnement)
Si X est integrable, alors la variable aleatoire $E[X|Y]$ aussi et on a :

$$E[E[X|Y]] = E[X] \tag{1.5}$$

1.3 Processus stochastique

Définition 1.8
On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, un espace mesurable (E, ε) et un ensemble $\mathcal{T}$.
On appelle processus stochastique, ou processus aléatoire, une famille $(X_t)_{t\in\mathcal{T}}$ de variables aléatoires à valeurs dans E. Autrement dit, pour tout $t \in \mathcal{T}$, l'application $\omega \to X_t(\omega)$ est une application mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans (E, ε). On appelle E l'espace d'états du processus.
En pratique, on utilise souvent les processus pour de la modélisation dynamique : X_t est la valeur d'une variable d'intérêt à la date t. L'ensemble $\mathcal{T}$ représente alors l'ensemble des dates possibles (souvent on aura $\mathcal{T} = \mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}^p$, $\mathbb{N}, ...$).

Remarque
Lorsque $\mathcal{T} = \mathbb{N}$ ou $\mathcal{T} = \mathbb{Z}$ on dit que $(X_t)_{t\in\mathcal{T}}$ est un processus à temps discret. Lorsque $\mathcal{T} = \mathbb{R}$, ou un intervalle de $\mathbb{R}$, on parle de processus à temps continu.

Théoreme 1.2 (Continuité de Kolmogorov)
On suppose que le processus $X = (X)_{t\geq 0}$ satisfait la condition suivante : pour tout $t > 0$, il existe des constantes positives α, β, D telles que

$$\mathbb{E}\big[|X_t - X_s|^\alpha\big] \leq C|t-s|^{1+\beta}, 0 \leq s, t \leq T \tag{1.6}$$

Alors il existe une version continue de X.

Preuve
Voir [13] Stroock and Varadhan (1979, p. 51). Nous utiliserons ce théorème pour prouver la continuité du mouvement brownien.

1.3.1 Processus markoviens

Définition 1.9
Un processus stochastique est Markovien si, conditionnellement à sa valeur présente au temps t, son évolution future est indépendante de son passé.
C'est-a-dire : pour toute variable aléatoire X fonction de $\{Y_s,\ s > t\}$, la loi de X conditionnelle à $\{Y_s,\ s \leq t\}$, est la même que celle conditionnelle à Y_t.

Pour de tels processus, la meilleure prévision qu'on puisse faire du futur, connaissant le passé et le présent, est identique à la meilleure prévision qu'on puisse faire du futur, connaissant uniquement le présent : si on connait le présent, la connaissance du passé n'apporte pas d'information supplémentaire utile pour la prédiction du futur.

1.4 Filtrations et Martingales

1.4.1 Filtration

Définition 1.10
Dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on dit qu'une famille de sous-tribus $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ de $\mathcal{A}$ est une filtration si $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{A}$ pour $0 \leq s < t < +\infty$. Autrement dit, c'est une famille croissante de sous-tribus de $\mathcal{A}$.

Un processus $X = (X)_{t\geq 0}$ est dit adapté à $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ ou ($\mathcal{F}$-adapté) si, pour tout $t \geq 0$, X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable. Souvent, on considère pour $\mathcal{F}$ la filtration naturelle, ou canonique du processus X, définie par $\mathcal{F}_t = \sigma(\{X_u\}_{u\leqslant t})$. On a alors $\mathbb{E}\big[X_t|\mathcal{F}_t\big] = X_t$, c'est à dire que $\mathcal{F}_t$ contient toute l'information de X jusqu'à l'instant t.

1.4.2 Martingale

Définition 1.11
On dit qu'un processus $M = (M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale relativement à la filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ si, pour tout $t \geq 0$,

1. *M_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable (M est $\mathcal{F}$-adapté)*
2. *$\mathbb{E}\big[|M_t| \mid \mathcal{F}_t\big] < \infty$*
3. *$\mathbb{E}\big[M_t|M_s\big] = M_s$ pour tout $s \leq t$*

L'inégalité de Doob permet d'étendre l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev aux trajectoires des martingales :

Théoreme 1.3 (Inégalité de martingale de Doob)
Pour une martingale $M = (M_t)_{t\geq 0}$ dont les trajectoires sont continues p.s, on a

$$\forall T \geq 0, \forall p \geq 1, \forall \lambda > 0,\ P\Big[\sup_{0\leqslant t\leqslant T} |M_t| \geq \lambda\Big] \leqslant \frac{\mathbb{E}[|M_t|^p]}{\lambda^p} \tag{1.7}$$

1.5 Mouvement brownien

Le mouvement brownien, ou processus de Wiener, est une description mathématique du mouvement aléatoire d'une « grosse » particule immergée dans un fluide et qui n'est soumise à aucune autre interaction que des chocs avec les « petites » molécules du fluide environnant. Il en résulte un mouvement très irrégulier de la grosse particule, qui a été décrit pour la première fois en 1827 par le botaniste **Robert Brown** en observant des mouvements de particules à l'intérieur de grains de pollen de Clarkia pulchella.

En 1901, **Louis Bachelier** propose un premier modèle mathématique du mouvement brownien et l'applique à la finance.

En 1905, **Albert Einstein** donne une description quantitative du mouvement brownien et indique notamment que des mesures faites sur le mouvement permettent d'en déduire leur dimension moléculaire.

Norbert Wiener donne une définition mathématique en 1923 en construisant une mesure de probabilité sur l'espace des fonctions continues réelles. Il étudie, de manière mathématique, la continuité et la non-dérivabilité des trajectoires du mouvement brownien. Il définit également l'intégrale de Wiener (l'intégrale par rapport au mouvement brownien).

En 1933, **Paul Lévy** démontre que le mouvement brownien est un cas particulier de martingale continue, notion inventée par **Jean Ville** en 1933, celui où le carré de ce mouvement soustrait de sa valeur temps reste une martingale. Il démontre également que ce cas particulier est le seul parmi les martingales à avoir ces deux propriétés. Ce faisant, il donne la définition du mouvement brownien, c'est-à-dire ses conditions nécessaires et suffisantes.

Définition 1.12 (Paul Lévy)
Un mouvement brownien est une martingale telle que

1. *cette martingale est continue dans le temps*

2. *son carré soustrait de son temps est une martingale*

(M_t) est un mouvement brownien si et seulement si (M_t) est une martingale continue telle que $(M_t^2 - t)$ est une martingale.

Descriptions dimensionnelles

Définition 1.13 (uni-dimensionnelle)
Le mouvement brownien unidimensionnel $(B_t)_{t\geq 0}$ *est un processus stochastique dépendant du temps* t *et vérifiant :*

1. *(accroissements indépendants) Quels que soient les temps* t *et* s *tels que* $t > s$, *l'accroissement* B_t - B_s *est indépendant du processus* $(B_u)_{0\leq u\leq s}$ *avant le temps* s.

2. *(accroissements stationnaires et gaussiens) Quels que soient les temps* t *et* s *tels que* $t > s$, *l'accroissement* B_t - B_s *est une variable aléatoire normale de moyenne nulle et de variance* $t - s$.

3. $(B_t)_{t\geq 0}$ *est presque sûrement continu, c'est-à-dire pour presque toute réalisation, la fonction* $t \to B_t(\omega)$ *est continue.*

4. *Il est souvent supposé que* $B_0 = 0$. *On dit alors que le mouvement brownien est standard.*

Définition 1.14 (multi-dimensionnelle)
Le mouvement brownien d-dimensionnel est un processus $(B_t)_{t\geq 0} := (B_t^1, B_t^2, ..., B_t^d)_{t\geq 0}$ *où les processus* B^1, B^2,..., B^d *sont des mouvements browniens unidimensionnels et indépendants.*

À parti du théorème de continuité de Kolmogorov (*théorème 2.2*), nous avons ce corollaire.

Corollaire 1.1
Tout Brownien a une version continue.

Preuve
En se référant à l'exercice 2.8 *de [11], on a :* $\mathbb{E}\big[|B_t - B_s|^4\big] = n(n+2)|t-s|^2$ *avec* $\alpha = 4$, $C = n(n+2)$ *et* $\beta = 1$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *(Théorème continuité de Kolmogorov(1.2)), il existe une version continue de* B_t.

Construction du mouvement brownien unidimensionnelle

Plusieurs constructions ont été faites.

1. Au moyen du théorème de consistance de Kolmogorov(1933 et 1956).

2. Wiener (1923), Lévy (1948), Ciesielski (1961) : construction basée sur la théorie des espaces de Hilbert, et sur le caractère Gaussien du mouvement brownien.

3. Au moyen d'une série de Fourier

4. Au moyen d'une marche aléatoire. Le théorème de Donsker (1951) montre qu'une marche aléatoire convenablement renormalisée converge en loi vers le mouvement brownien.

C'est cette quatrième méthode que l'on va développer.

La marche aléatoire unidimensionnelle symétrique

Soient $(X_i)_{i\geq 1}$ des variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées (*i.i.d.*) telles que

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = \frac{1}{2} \tag{1.8}$$

La marche aléatoire unidimensionnelle symétrique est le processus stochastique à temps discret $(S_n)_{n\geq 0}$ donné par

$$S_0 = 0, S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, n \geq 1 \tag{1.9}$$

Ce processus stochastique vit dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. L'univers peut être identifié à $\{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$ avec, pour une réalisation $\omega \in \Omega$,

$$S_n(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i, n \geq 0 \tag{1.10}$$

La σ-algèbre $\mathcal{A}$ décrit l'ensemble des évènements, et contient en particulier les évènements

$$A_{x_1,x_2,...,x_n} = \{\omega \in \Omega : \omega_1 = x_1, ..., \omega_n = x_n\}, (x_1, ..., x_n) \in \{-1, 1\}^n, \tag{1.11}$$

qui ont probabilité 2^{-n}. La filtration canonique de $\mathcal{A}$ est la suite croissante de σ-algèbres

$$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 ... \subset \mathcal{A} = \bigcup_{n\geq 0} \mathcal{F}_n \tag{1.12}$$

avec

$\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \varnothing\}$
$\mathcal{F}_1 = \{\Omega, \varnothing, A_1, A_{-1}\}$
$\mathcal{F}_2 = \{\Omega, \varnothing, A_1, A_{-1}, A_{1,1}, A_{1,-1}, A_{-1,1}, A_{-1,-1}\}$
...
$\mathcal{F}_n = \{\Omega, \varnothing\} \bigcup_{m=1}^{n} \{A_x : \mathrm{x} \in \{-1, 1\}^m\}$
...

C'est-à-dire que $\mathcal{F}_n$ contient tous les événements qui ne dépendent que de l'histoire du processus jusqu'au temps n.
Notons quelques propriétés élémentaires de la marche aléatoire.
Étant donné que les variables aléatoires sont indépendantes et totalement décorrélées, les marches aléatoires ont un caractère Markovien. Effectivement, le futur de la marche aléatoire dépend uniquement du pas actuel. Le passé de la marche aléatoire n'a aucune influence sur le futur de la marche. Seule la position S_{n-1} à l'instant $n-1$ affectera la position S_n à l'instant n :

$$S_n = S_{n-1} + X_n \tag{1.13}$$

$$S_n - S_m =^D S_{n-m} \tag{1.14}$$

où le symbole $=^D$ désigne l'égalité en distribution.
Comme l'espérance et la variance des X_i valent respectivement $\mathbb{E}[X_i] = 0$ et $\text{Var}[X_i] = \mathbb{E}[X_i^2]$ - $\mathbb{E}[X_i] = 1$, nous avons

$$\mathbb{E}[S_n] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i] = 0 \tag{1.15}$$

$$Var[S_n] = \sum_{i=1}^{n} Var[X_i] = n \tag{1.16}$$

la deuxième relation étant une conséquence de l'indépendance des X_i.

Proposition 1.3
La loi de S_n est binomiale :

$$\mathbb{P}[S_n = k] = \begin{cases} \dfrac{1}{2^n} \dfrac{n!}{\left(\dfrac{n+k}{2}\right)! \left(\dfrac{n-k}{2}\right)!} & \text{si } k \in \{-n, -n+2, ..., n-2, n\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{1.17}$$

Preuve
Le fait que $S_0 = 0$ et S_{k+1} - $S_k = \pm 1$
L'image de S_n est $\{-n, -n+2, ..., n-2, n\}$
Soit S_n représentant la somme de n pas aléatoire. Chaque pas i peut prendre des valeurs $X_i = 1$ ou $X_i = -1$ respectivement selon que le pas est en avant ou en arrière en suivant la loi uniforme ou de Bernoulli par un changement de variable de probabilité $\frac{1}{2}$. Donc la probabilité de réaliser n pas suivant un chemin précis est $\frac{1}{2^n}$.
On s'intéresse après n pas, le nombre de façons de se trouver à la position k sur la droite c-a-d $S_n = k$ avec $S_0 = 0$. Supposons que k est positif, on est à k pas en

avant du point de départ, le reste $n-k$ pas s'annule dans la sommation des X_i de S_n, ce qui signifie $\frac{n-k}{2}$ pas en avant et en arrière.
Donc on a en n pas, $k + \frac{n-k}{2} = \frac{n+k}{2}$ pas en avant et $\frac{n-k}{2}$ en arrière. Il y a $\binom{n}{\frac{n+k}{2}}$ façons de se trouver à la position k.

L'analogue en temps continu de cet événement jouera un rôle important dans la suite.

Construction du processus de Wiener

Le processus de Wiener est alors obtenu en regardant une limite de cette marche aléatoire, vue de très loin et en très accéléré. Cela revient à considérer une marche avec des pas de plus en plus petits et de plus en plus fréquents.

Considérons la suite de processus

$$B_t^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} S_{\lfloor nt \rfloor} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{\lfloor nt \rfloor} X_i, t \geq 0 \tag{1.18}$$

Définissons d'abord formellement le processus B_t en prenant la limite au sens des distributions finies de $B_t^{(n)}$ lorsque $n \to \infty$. Autrement dit, B_t est défini par le fait que pour toute partition $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_k$ et tout $(x_1, x_2, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k$,

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}[B_{t_i}^{(n)} \leq x_i, i = 1, ..., k] = \mathbb{P}[B_{t_i} \leq x_i, i = 1, ..., k] \tag{1.19}$$

Notons tout d'abord que

$$\lim_{n \to +\infty} Var[B_t^{(n)}] = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^2 \lfloor nt \rfloor = t \tag{1.20}$$

De plus, nous pouvons écrire

$$B_t^{(n)} = \frac{S_{\lfloor nt \rfloor}}{\sqrt{\lfloor nt \rfloor}} \sqrt{\frac{\lfloor nt \rfloor}{n}}$$

Le théorème de la limite centrale (ou un calcul direct à partir de (1.17) montre que la loi de $S_{\lfloor nt \rfloor} / \sqrt{\lfloor nt \rfloor}$ converge, lorsque $n \to \infty$, vers la loi normale standard $\mathcal{N}(0, 1)$ (i.e. de moyenne nulle et variance 1). Il suit que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}[B_{t_i}^{(n)}\leq x] &= \mathbb{P}[\sqrt{t}\mathcal{N}(0,1)\leq x] &(1.21)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x/\sqrt{t}} e^{-y^2/2}dy &(1.22)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{-\infty}^{x} e^{-z^2/2t}dz &(1.23)\\ &= \mathbb{P}[\mathcal{N}(0,1)\leq x] &(1.24)\end{aligned}$$

Pour tout t fixé, la loi de $B_t^{(n)}$ tend donc vers la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. De plus, si $t > s > 0$, $B_t^{(n)}$ - $B_s^{(n)}$ est indépendant de $B_u^{(n)}$ pour tous les $u \leqslant s$ et nous avons par (1.14)

$$B_t^{(n)} - B_s^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}}(S_{\lfloor nt\rfloor} - S_{\lfloor ns\rfloor}) =^D \frac{1}{\sqrt{n}}S_{\lfloor nt\rfloor-\lfloor ns\rfloor} \tag{1.25}$$

dont la loi tend vers $\mathcal{N}(0,t-s)$. Toutes les distributions finies de B_t sont ainsi définies à partir de

$$\mathbb{P}[B_{t_1}\leq x_1, B_{t_i}-B_{t_{i-1}}\leq x_i, i=2,...,k] = \mathbb{P}[B_{t_1}\leq x_1]\prod_{i=2}^{k}[B_{t_i}-B_{t_{i-1}}\leq x_i] \tag{1.26}$$

Remarque
Ce processus satisfait la définition (1.13). Les propriétés (1.20),(1.24) et (1.25) restent vraies pour des X_i i.i.d. quelconques, pourvu qu'ils aient espérance 0 *et variance* 1.

Propriétés élémentaires du processus de Wiener

Les propriétés suivantes sont des conséquences directes de la définition (1.13).

1. **Symétrie** : $(-B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien standard.

2. **Propriété d'échelle** : Pour tout $c > 0$, $(cB_{t/c^2})_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien standard.

3. **Propriété différentielle** : Pour tout $t \geqslant 0$, $(B_{t+s}-B_t)_{s\geqslant 0}$ est un mouvement Brownien standard, indépendant de $(B_u)_{u<t}$.

4. **Processus Gaussien** : Le processus de Wiener est markovien de loi gaussienne de moyenne nulle (c'est-à-dire que ses distributions jointes finies sont normales centrées), et il est caractérisé par sa covariance

$$\mathrm{Cov}[B_t,B_s] = \mathbb{E}[B_t B_s] = s \wedge t$$

($s \wedge t$ désigne le minimum de s et t).

5. **Renversement du temps** : Le processus $\left(tB_{1/t}\right)_{t>0}$ qui s'annule en $t = 0$ est un mouvement Brownien standard.
6. **Non dérivabilité** : B_t n'est dérivable en presque aucun point.

Chapitre 2

Intégrales d'Itô

2.1 Position du problème

Le calcul différentiel donne un cadre à la notion d'équation différentielle ordinaire, qui sert de modèle pour de phénomènes variables dans le temps. Quand on a voulu ajouter à ces équations des perturbations aléatoires, on a été gêné par la non différentiabilité du Mouvement Brownien. Du coup on a commencé par construire une intégrale par rapport au Mouvement Brownien, pour ensuite définir la notion d'équation différentielle stochastique. Et il a fallu donner un sens à $\int_0^t H_s dB_s$ appelé Intégrale d'Itô.
Elle généralise de façon stochastique l'intégrale de Stieltjes. L'intégrande H et l'intégrateur sont tous deux des processus stochastiques. Le résultat de cette intégration, est aussi un processus stochastique.
Une équation différentielle classique est souvent donnée sous la forme explicite :

$$\frac{dx_t}{dt} = b_t(x_t) \tag{2.1}$$

Lorsque des phénomènes aléatoires viennent perturber l'équation (2.1), ils peuvent être pris en compte par l'ajout d'un terme supplémentaire de bruit, ce que l'on exprimera sous la forme

$$\frac{dX_t}{dt} = b_t(X_t) + \sigma_t(X_t)W_t \tag{2.2}$$

où W_t est une grandeur aléatoire. Dans beaucoup de situations, le processus $W = (W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un bruit blanc, c'est-à-dire un processus aléatoire stationnaire centré dont les variables aléatoires sont indépendantes. En fait, la construction d'un tel processus est délicate et utilise la notion de processus généralisé qui fait intervenir une extension au cas aléatoire de la théorie des distributions. Une façon plus simple de procéder consiste à reformuler l'équation (2.2) sous la forme

$$dX_t = b_t(X_t)dt + \sigma_t(X_t)W_t dt \tag{2.3}$$

puis à considérer une version discrétisée de cette équation, de la forme

$$X_{k+1} = X_k + b_k(X_k)\triangle_k + \sigma_k(X_k)W_k\triangle_k \tag{2.4}$$

avec les notations suivantes, qui à défaut d'être très rigoureuses sont le mérite de simplifier les écritures : $X_k = X_{tk}, W_k = W_{tk}$, et $\triangle_k = t_{k+1} - t_k$. Si on cherche à exprimer $W_k\triangle_k$ comme l'accroissement d'un certain processus $V = (V_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$,c.à.d $W_k\triangle_k = V_{tk+1} - V_{tk}$, les propriétés du bruit blanc W entrainent que V devrait être à accroissements centrés, stationnaires et indépendants. Or, on a indiqué au chapitre II que les seuls processus V de ce type qui possèdent des trajectoires continues sont les mouvements browniens. Il est approprié donc de prendre pour V un mouvement brownien, que l'on notera B. On pourra ainsi écrire (2.4) sous la forme

$$X_{k+1} = X_k + b_k(X_k)\triangle_k + \sigma_k(X_k)\triangle B_k \tag{2.5}$$

avec $\triangle B_k = B_{k+1} - B_k$. En propageant cette équation, on trouve alors

$$X_{k+1} = X_0 + \sum_{j=0}^{k} b_j(X_j)\triangle_j + \sum_{j=0}^{k} \sigma_j(X_j)\triangle B_j \tag{2.6}$$

Lorsque $max_j\triangle_j \to 0$, en supposant que l'on ait fixé $t_{k+1} = t$, la première somme du terme de droite de (2.6) converge en moyenne quadratique vers

$$I_1 = \int_0^t b_u(X_u)du \tag{2.7}$$

En fait, cette intégrale peut être définie dès lors que $\int_{[0,t]^2} \mathbb{E}[b_u(X_u)b_v(X_v)]dudv < \infty$ (voir [13] p.15) comme la limite en moyenne quadratique de $\sum_{j=0}^{k} b_j(X_j)\triangle_j$. De même, on aimerait établir l'existence d'une limite, en moyenne quadratique, pour la deuxième somme lorsque $max_j\triangle_j \to 0$, cette limite étant notée

$$I_2 = \int_0^t \sigma_u(X_u)dB_u \tag{2.8}$$

Notons que si $\sigma_u(X_u)$ est une fonction déterministe indépendante de X_u, alors l'expression (2.8) correspond à l'intégration d'une fonction déterministe par une mesure aléatoire. La construction de l'intégrale (2.8) dans le cas où $\sigma_u(X_u)$ dépend effectivement de X_u s'avère par contre plus délicate et sera développée dans la section suivante.

2.2 Construction de l'intégrale d'Itô

2.2.1 L'intégrale d'Itô pour les fonctions élémentaires

Comme pour l'intégration classique des fonctions continues, pour construire des intégrales sur un intervalle $[a,b]$ de la forme

$$\int_a^b X_t dB_t \tag{2.9}$$

(où X est un processus aléatoire) en un sens que l'on va préciser ci-dessous. On va tout d'abord définir cette intégrale pour une certaine classe de fonctions, dites élémentaires, puis on étendra cette définition par densité à un ensemble plus large de fonctions.
On va donc construire l'intégrale d'Itô (2.9) pour une classe importante de processus X_t. On note $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t>0}$ la filtration canonique de B et on se donne la famille suivante :

Définition 2.1
On définit la famille $\mathcal{V}([a,b])$ des processus aléatoires $X = (X_t)_{t>0}$ qui vérifient

1. *Les trajectoires de X sont p.s mesurables sur la tribu borélienne $\mathcal{B}([a,b])$ de $[a,b]$.*
2. *X est $\mathcal{F}$-adapté*
3. $\mathbb{E}[\int_a^b X_t^2 dt] < \infty$

Définition 2.2
Une fonction $\phi \in \mathcal{V}([a,b])$ est dite élémentaire ou simple s'il existe une subdivision $a = t_0 < t_1 < ... < t_N$ et des fonctions $e_0, ..., e_{N-1} : \Omega \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\phi_t(\omega) = \sum_{j=0}^{N-1} e_j(\omega)\mathcal{X}_{[t_j,t_{j+1}[}(t) \tag{2.10}$$

où $\mathcal{X}$ est la fonction caractéristique d'intervalle.

Ces fonctions élémentaires sont l'équivalent stochastique des fonctions étagées servant à définir l'intégrale de Lebesgue. On remarque que chacun des e_j est $\mathcal{F}_{t_j}$-mesurable.
Pour les fonctions élémentaires, on pose toujours par analogie avec la construction de l'intégrale de Lebesgue :

$$\int_a^b \phi_t(\omega) dB_t(\omega) = \sum_{j=0}^{N-1} e_j(\omega)[B_{t_{j+1}} - B_{t_j}](\omega) \tag{2.11}$$

Lemme 2.1 (Isométrie d'Itô pour les fonctions élémentaires)
Soit ϕ une fonction élémentaire bornée. Alors :

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_a^b \phi_t(\omega)dB_t(\omega)\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_a^b \phi_t^2(\omega)dt\right] \tag{2.12}$$

Preuve
Posons, pour simplifier les notations, $\triangle Bj = B_{t_{j+1}} - B_{t_j}$. Alors, en utilisant l'indépendance de $e_ie_j\triangle B_i$ et de B_j pour $i < j$,

$$\mathbb{E}[e_ie_j\triangle B_i\triangle B_j] = \begin{cases} 0 & si\ i \neq j \\ \mathbb{E}[e_j^2](t_{j+1} - t_j) & si\ i = j \end{cases} \tag{2.13}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\left(\int_a^b \phi dB\right)^2\right] &= \sum_{i,j} \mathbb{E}[e_ie_j\triangle B_i\triangle B_j] \\ &= \sum_j \mathbb{E}[e_j^2](t_{j+1} - t_j) \\ &= \mathbb{E}\left[\int_a^b \phi^2 dt\right] \end{aligned}$$

2.2.2 Extension aux fonctions de $\mathcal{V}([a, b])$

Pour définir l'intégrale Itô pour une fonction X de $\mathcal{V}([a, b])$, on va approcher X par une suite (ϕ_n) de fonctions élémentaires au sens suivant :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left[\int_a^b |X_t - \phi_{n_t}|^2 dt\right] \to 0 \tag{2.14}$$

Preuve (indications)
A défaut d'une preuve plus détaillée qu'on pourra trouver dans [11] indiquons ici les étapes de la démarche qui conduit au résultat. On établit successivement que

1. *tout processus borné g de $\mathcal{V}([a, b])$ dont les trajectoires sont continues est limite d'une suite de fonctions élémentaires ϕ_n de $\mathcal{V}([a, b])$ dans le sens où*

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left[\int_a^b (g - \phi_n)^2 dt\right] \to 0 \tag{2.15}$$

2. *tout processus borné h de $\mathcal{V}([a, b])$ est limite d'une suite de processus g_n de $\mathcal{V}([a, b])$ dont les trajectoires sont continues, et*

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left[\int_a^b (h - g_n)^2 dt\right] \to 0 \tag{2.16}$$

3. *tout processus X de $\mathcal{V}([a,b])$ est limite d'une suite de processus bornés h_n de $\mathcal{V}([a,b])$.*

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\Big[\int_a^b (X-h_n)^2 dt\Big] \to 0 \tag{2.17}$$

Pour les éléments de $\mathcal{V}([a,b])$ on définit alors l'intégrale d'Itô de X_t sur $[a;b]$ comme limite d'une suite d'intégrales d'Itô de fonctions élémentaires (ϕ_n) qui vérifient la relation (2.14) :

$$\int_a^b X_t dB_t = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \phi_{n_t} dB_t(\omega) \tag{2.18}$$

où la limite est une limite en moyenne quadratique (limite dans $L^2(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$) telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\Big[\int_a^b |X_t-\phi_{n_t}|^2 dt\Big] \to 0 \tag{2.19}$$

Remarque

1. *Une telle suite (ϕ_n) existe grâce à l'étude précédente des étapes 1 à 3.*

2. *L'isométrie d'Itô donne :*

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\int_a^b \phi_{n_t} dB_t(\omega) - \int_a^b \phi_{m_t} dB_t(\omega)\Big)^2\Big] = \mathbb{E}\Big[\int_a^b \big(\phi_{n_t}-\phi_{m_t}\big)^2 dt\Big] \tag{2.20}$$

Et (2.19) permet de conclure.

3. *L'isométrie d'Itô montre aussi que la limite ne dépend pas de la suite (ϕ_n) utilisée.*

4. *On peut étendre l'isométrie d'Itô des fonctions élémentaires aux fonctions de $\mathcal{V}([a,b])$:*

Corollaire 2.1 (Isométrie d'Itô)

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\int_a^b X_t(\omega) dB_t(\omega)\Big)^2\Big] = \mathbb{E}\Big[\int_a^b X_t^2(\omega) dt\Big] \tag{2.21}$$

Corollaire 2.2

$$\mathbb{E}\Big[\lim_{n\to+\infty}\int_a^b |X_t^{(n)}-X_t|^2 dt\Big] \to 0 \; alors, \int_a^b X_t dB_t = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b X_t^{(n)} dB_t \; dans \; L^2(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P}) \tag{2.22}$$

2.3 Propriété de l'intégrale d'Itô

Les propriétés suivantes sont prouvées aisément pour des processus X et Y $\in \mathcal{V}([0,t])$ satisfaisant la condition d'intégrabilité (2.1) et $0 \leq a < b < t$ (c constante).

1. $\int_a^b (X_s + Y_s) dB_s = \int_a^b X_s dB_s + \int_a^b Y_s dB_s$ (Linéarité)
   et $\int_a^b cX_s dB_s = c \int_a^b X_s dB_s$
2. $\int_a^t X_s dB_s = \int_a^b X_s dB_s + \int_b^t X_s dB_s$ (Additivité)
3. $\mathbb{E}\left[\int_a^t X_s dB_s \right] = 0$
4. $\int_a^t X_s dB_s$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable.

Preuve
Ces propriétés valent clairement pour les fonctions élémentaires, donc en prenant leur limite, on obtient ceci pour tout X et $Y \in \mathcal{V}([0,t])$

2.4 L'intégrale d'Itô comme un processus stochastique

L'intégrale sur un segment $[0,T]$ envoyait les fonctions de $\mathcal{V}([0,t])$ vers une variable aléatoire de carré intégrable. En faisant varier la borne d'intégration T, on obtient donc une famille de variables aléatoires qui peut être vue comme un processus. On peut alors se demander si ce processus est bien défini, et si oui quelles sont ses propriétés. Nous avons le théorème suivant :

Théoreme 2.1
Soit $X \in \mathcal{V}([0,t])$. Alors il existe une version continue par rapport à t de

$$\int_0^t X(s,\omega) dB_s(\omega), \; 0 \leq t \leq T$$

c'est-à-dire qu'il existe un processus stochastique J_t sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ continu par rapport à t tel que

$$\mathbb{P}\left(J_t = \int_0^t X(s) dB_s \right) = 1, \; \textit{pour tout } 0 \leq t \leq T$$

Corollaire 2.3
Soit $X \in \mathcal{V}([0,t])$. Alors pour tout t

$$M_t(\omega) = \int_0^t X(s,\omega) dB_s(\omega)$$

est une martingale par rapport à $\mathcal{F}_t$ et

$$P\Big(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|M_t|\geq\lambda\Big)\leqslant\frac{1}{\lambda^2}\mathbb{E}\Big[\int_a^t X(s,\omega)^2ds\Big];\ \lambda,T>0$$

La preuve de cette dernière inégalité se trouve dans le fait que l'intégrale d'Itô est une martingale continue, donc on peut appliquer l'inégalité de Doob combiné avec l'isométrie d'Itô. Pour une preuve détaillée du théorème (2.1), voir [11], page 32-33.

2.4.1 Exemple

De même que la méthode de construction de l'intégrale de Riemann à partir de fonctions en escalier est généralement peu utile pour le calcul pratique des intégrales classiques, les résultats ci dessus sont peu employés en pratique pour le calcul des intégrales stochastiques. On présentera pour cela dans le chapitre suivant la formule d'Itô dont on verra comment la mettre en œuvre pour le calcul des intégrales stochastiques et pour la résolution des equations différentielles stochastiques (EDS).

Nous donnons quand même ici un exemple de calcul explicite d'une intégrale stochastique par la méthode d'Itô comme limite d'intégrales de fonctions élémentaires. Calculons

$$I=\int_0^t B_s dB_s \tag{2.23}$$

Prenons

$$\phi_n(s,\omega)=\sum_j B_j(\omega)\mathcal{X}_{[t_j,t_{j+1}[}(s) \tag{2.24}$$

où $\mathcal{X}$ est la fonction caractéristique d'intervalle.
On a alors bien

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[\int_0^t(\phi_n-B_s)^2ds\Big] &= \mathbb{E}\Big[\int_0^t(\sum_j B_j\mathcal{X}_{[t_j,t_{j+1}[}(s)-B_s)^2ds\Big]\\
&= \mathbb{E}\Big[\sum_j\int_{t_j}^{t_{j+1}}(B_j-B_s)^2ds\Big]\\
&= \sum_j\int_{t_j}^{t_{j+1}}\mathbb{E}\Big[(B_j-B_s)^2ds\Big]\\
&= \sum_j\int_{t_j}^{t_{j+1}}(s-t_j)ds\Big]\\
&= \frac{1}{2}\sum_j(t_{j+1}-t_j)^2\to 0,\ \textit{quand}\ \triangle t_j\to 0
\end{aligned}$$

Ce qui entraine, d'après le corollaire (2.2) que

$$\int_0^t B_s dB_s = \lim_{\triangle t_j \to 0} \int_0^t \phi_n(s,\omega) dB_s = \lim_{\triangle t_j \to 0} \sum_j B_j \triangle B_j \tag{2.25}$$

Calculer I revient donc à calculer la limite de l'intégrale $\int_0^t \phi_n(s) dB_s$. Notons que

$$\triangle(B_j)^2 = B_{j+1}^2 - B_j^2 = (B_{j+1} - B_j)^2 + 2B_j(B_{j+1} - B_j) = (\triangle B_j)^2 + 2B_j \triangle B_j \tag{2.26}$$

d'où

$$B_j \triangle B_j = \frac{1}{2}\Big(\triangle(B_j)^2 - (\triangle B_j)^2\Big) \tag{2.27}$$

Ce qui entraine que

$$\int_0^t \phi_n(s) dB_s = \sum_j B_j \triangle B_j = \frac{1}{2}\Big(\sum_j \triangle(B_j)^2 - \sum_j (\triangle B_j)^2\Big) \tag{2.28}$$

Or

$$\sum_j \triangle(B_j)^2 = B_1^2 - B_0^2 + B_2^2 - B_1^2 + ... + B_t^2 - B_{j-1}^2 = B_t^2,\ car\ B_0^2 = 0 \tag{2.29}$$

d'où

$$\sum_j B_j \triangle B_j = \frac{1}{2}\Big(B_t^2 - \sum_j (\triangle B_j)^2\Big) \tag{2.30}$$

Montrons que $\sum_j (\triangle B_j)^2 \to t$, pour cela calculons

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[\Big(\sum_j (\triangle B_j)^2 - t\Big)^2\Big] &= \mathbb{E}\Big[\Big(\sum_j (\triangle B_j)^2\Big)^2 - 2t \sum_j (\triangle B_j)^2 + t^2\Big)^2\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[\Big(\sum_j (\triangle B_j)^2\Big)^2\Big] - 2t \sum_j \mathbb{E}\Big[(\triangle B_j)^2\Big] + t^2 \\
&= \mathbb{E}\Big[\Big(\sum_j (\triangle B_j)^2\Big)^2\Big] - 2t \sum_j \triangle t_j + t^2 \\
&= \mathbb{E}\Big[\Big(\sum_j (\triangle B_j)^2\Big)^2\Big] - 2t^2 + t^2 \\
&= \mathbb{E}\Big[\Big(\sum_j (\triangle B_j)^2\Big)^2\Big] - t^2
\end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned}
\Big(\sum_j (\triangle B_j)^2\Big)^2 &= \sum_j (\triangle B_j)^2 \times \sum_j (\triangle B_j)^2 \\
&= \sum_j (\triangle B_j)^4 + 2 \sum_{l<j} (\triangle B_l)^2 (\triangle B_j)^2
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\sum_j (\triangle B_j)^2\right)^2\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_j (\triangle B_j)^4\right] + 2\mathbb{E}\left[\sum_{l<j} (\triangle B_l)^2 (\triangle B_j)^2\right] \\
&= \sum_j \mathbb{E}\left[(\triangle B_j)^4\right] + 2\sum_{l<j} \triangle t_l \triangle t_j \\
&= 3\sum_j (\triangle t_j)^2 + 2\sum_{l<j} \triangle t_l \triangle t_j
\end{aligned}$$

La troisième égalité provient du fait que pour une variable centrée gaussienne Y on a $\mathbb{E}[Y^4] = 3(\mathbb{E}[Y^2])^2$, donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\sum_j (\triangle B_j)^2\right)^2\right] &= 2\sum_j (\triangle t_j)^2 + \sum_j (\triangle t_j)^2 + 2\sum_{l<j} \triangle t_l \triangle t_j \\
&= 2\sum_j (\triangle t_j)^2 + \left(\sum_j \triangle t_j\right)^2 \\
&= 2\sum_j (\triangle t_j)^2 + t^2
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_j (\triangle B_j)^2 - t\right)^2\right] = 2\sum_j (\triangle t_j)^2 + t^2 - t^2 = 2\sum_j (\triangle t_j)^2 \tag{2.31}$$

Or

$$\textstyle\sum_j (\triangle t_j)^2 \to 0 \text{ quand } \triangle t_j \to 0 \text{ implique que } \mathbb{E}\left[\left(\sum_j (\triangle B_j)^2 - t\right)^2\right] \to 0$$

Donc

$$I = \int_0^t B_s dB_s = \lim_{\triangle t_j \to 0} \int_0^t \phi_n(s,\omega) dB_s = \lim_{\triangle t_j \to 0} \sum_j B_j \triangle B_j = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{t}{2} \tag{2.32}$$

On notera la différence entre l'intégrale de Riemann et l'intégrale d'Itô qui fait apparaitre ici le terme supplémentaire $-\dfrac{t}{2}$.
On a donc réussi à calculer l'intégrale d'Itô cherchée, mais comme indiqué auparavant cette approche directe est laborieuse. Le chapitre suivant va nous fournir des outils plus efficaces pour intégrer les EDS.

2.5 Extension d'intégrale d'Itô

On considère maintenant $(B_t^1, B_t^2, ..., B_t^n)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien en dimension n. Lorsque l'on veut définir des intégrales du genre $\int B_t^2(\omega)dB_t^1(\omega)$, la filtration $(\mathcal{F}_t)$ engendrée par B_s^1 pour $s \leq t$ ne convient pas. En effet, B_t^2 n'est pas en général $(\mathcal{F}_t)$ mesurable et la condition 2 de la définition (2.1) n'est pas remplie. On va donc utiliser la filtration plus grosse $(\mathcal{H}_t)$ où $\mathcal{H}_t$ est engendrée par $B_{s1}, B_{s2}, ..., B_{sn}$ pour $s_1, s_2, ..., s_n \leq t$. Grâce à cette filtration, on peut définir l'intégrale Itô multidimensionnelle.

Définition 2.3
Soit $v(t,\omega) = [v_{ij}(t,\omega)]$ une matrice de taille $m\times n$ telle que v_{ij} soit dans $\mathcal{V}([a,b])$ pour tout i et pour tout j. On définit alors l'intégrale de v par rapport à B :

$$\int_a^b vdB = \int_a^b \begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{m1} & \cdots & v_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dB_1 \\ \vdots \\ dB_n \end{pmatrix} \tag{2.33}$$

comme étant le vecteur colonne de dimension m dont la i^{eme} composante est donnée par la somme suivante de n intégrales d'Itô en dimension 1 :

$$\sum_{j=1}^{n} \int_a^b v_i j(s,\omega)dB_j(s,\omega) \tag{2.34}$$

On notera $\mathcal{V}^{m\times n}([a,b])$ l'ensemble des telles fonctions v qui admettent une intégrale Itô.

Chapitre 3

Formule d'Itô

3.1 Formule d'Itô en dimension 1

L'exemple (2.4.1) illustre que la définition de base des intégrales d'Itô n'est pas très utile quand on essaie d'évaluer une intégrale donnée. Ceci est similaire à la situation des intégrales ordinaires de Riemman, où nous n'utilisons pas la définition de base mais plutôt le théorème fondamental du calcul intégral puis la règle de la chaine dans les calculs explicites.
Dans ce contexte, cependant, nous n'avons pas de théorie de différenciation, seulement une théorie d'intégration. Néanmoins il s'avère qu'il est possible d'établir une version intégrale Itô de la règle de la chaîne, appelée la formule Itô. La formule d'Itô est, comme nous le montrerons par des exemples, très utile pour évaluer les intégrales d'Itô.
A partir de l'exemple

$$I = \int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{t}{2} \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{2}B_t^2 = \frac{t}{2} + \int_0^t B_s dB_s \tag{3.1}$$

Nous remarquons l'image de l'intégrale d'Itô $B_t = \int_0^t dB_s$ par l'application $g(x) = \frac{1}{2}x^2$ n'est plus une intégrale d'Itô de la forme

$$\int_0^t f(s,\omega)dB_s(\omega)$$

Mais une combinaison d'une dB_s- et une ds-intégrale.

$$\frac{1}{2}B_t^2 = \int_0^t \frac{1}{2}ds + \int_0^t B_s dB_s \tag{3.2}$$

Il s'avère que si nous introduisons les processus d'Itô (aussi appelés intégrales stochastiques) comme somme d'une intégrale dB_s et d'une intégrale ds, alors cette famille est stable sous des applications lisses. Ainsi nous définissons :

Définition 3.1 (Processus d'Itô en dimension 1)
Soit B_t un mouvement Brownien de dimension 1 sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Un processus d'Itô de dimension 1 (ou intégrale stochastique)est un processus stochastique X_t sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ de la forme

$$X_t = X_0 + \int_0^t u(s,\omega)ds + \int_0^t v(s,\omega)dB_s \tag{3.3}$$

où $v \in \mathcal{V}$ et u est $\mathcal{F}$-adapté tel que

$$\mathbb{P}\left[\int_0^t v(s,\omega)^2 ds < \infty \text{ pour tout } t \geq 0\right] = 1 \tag{3.4}$$

et

$$\mathbb{P}\left[\int_0^t |u(s,\omega)| ds < \infty \text{ pour tout } t \geq 0\right] = 1 \tag{3.5}$$

Si X_t est un processus d'Itô de la forme (3.3), cette équation s'écrit parfois sous la forme différentielle plus courte :

$$dX_t = udt + vdB_t \tag{3.6}$$

Par exemple, (3.1) (ou(3.2)) peut être représenté par

$$d(\frac{1}{2}B_t^2) = \frac{1}{2}dt + B_t dB_t \tag{3.7}$$

Nous allons énoncer maintenant le premier résultat principal de ce chapitre.

Théoreme 3.1 (Formule d'Itô en dimension 1)
Soit X_t un processus d'Itô donnée par

$$dX_t = udt + vdB_t$$

Soit $g(t,x) \in C^2([0,\infty) \times \mathbb{R})$ (c'est-à-dire g est deux fois continue et différentiable sur $([0,\infty) \times \mathbb{R})$. Alors

$$Y_t = g(t, X_t)$$

est aussi un processus d'Itô, et

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t,X_t)dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t,X_t)dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t,X_t)(dX_t)^2 \tag{3.8}$$

où $(dX_t)^2 = (dX_t).(dX_t)$ est calculé selon les règles

$$dt.dt = dt.dB_t = dB_t.dt = 0, \; dB_t.dB_t = dt \tag{3.9}$$

Avant de prouver la formule d'Itô, regardons quelques exemples.

Exemple 3.1
Prenons à nouveau

$$I = \int_0^t B_s dB_s \qquad \text{du chapitre 3}$$

Posons $X_t = B_t$ *et* $g(t,x) = \frac{1}{2}x^2$. *Alors*

$$Y_t = g(t, B_t) = \frac{1}{2}B_t^2$$

Alors par la formule d'Itô

$$\begin{aligned} dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t,X_t)dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t,X_t)dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t,X_t)(dX_t)^2 &= B_t dB_t + \frac{1}{2}(dB_t)^2 \\ &= B_t dB_t + \frac{1}{2}dt \end{aligned}$$

Ainsi

$$d(\frac{1}{2}B_t^2) = B_t dB_t + \frac{1}{2}dt$$

Autrement dit,

$$\frac{1}{2}B_t^2 = \int_0^t B_s dB_s + \frac{1}{2}t, \ \text{comme au chapitre 3}$$

Exemple 3.2
On s'intéresse maintenant au résultat de cette intégrale :

$$\int_0^t s dB_s$$

D'après le calcul classique il semble raisonnable qu'un terme de la forme de tB_t *apparaisse, nous posons donc*

$$g(t,x) = tx$$

et

$$Y_t = g(t, B_t) = tB_t$$

Alors par la formule d'Itô

$$dY_t = B_t dt + t dB_t + 0$$

c'est-à-dire

$$d(tB_t) = B_t dt + t dB_t$$

ou

$$tB_t = \int_0^t B_s ds + \int_0^t s dB_s$$

ou

$$\int_0^t s dB_s = tB_t - \int_0^t B_s ds$$

Ce qui est raisonnable du point de vue d'intégration par parties.

3.2 Formule d'intégration par parties

Plus généralement, pour une fonction f_t déterministe intégrable, on a le résultat suivant :

$$\int_0^t f_u dB_u = f_t B_t - \int_0^t B_u df_u \tag{3.10}$$

Notons qu'il est crucial pour ce résultat de maintenir que f ne dépend pas de ω. En cas contraire nous avons le théorème qui suit.

Théoreme 3.2 (Règle du produit d'Itô)
Soit X_1 et X_2 deux processus d'Itô.

$$dX_1 = u_1 dt + v_1 dB$$
$$dX_2 = u_2 dt + v_2 dB$$

Alors le produit X_1X_2 est un processus d'Itô, et

$$d(X_1X_2) = X_2 dX_1 + X_1 dX_2 + dX_1 dX_2 \tag{3.11}$$

En utilisant les regles de (3.9) on a,

$$d(X_1X_2) = X_2 dX_1 + X_1 dX_2 + v_1 v_2 dt \tag{3.12}$$

L'expression $dX_1 dX_2$ *ou* $v_1 v_2 dt$ est le terme correctif d'Itô. L'intégration de la règle du produit d'Itô donne la formule d'intégration par parties

$$\int_0^t X_2 dX_1 = \big[X_1X_2\big]_0^t - \int_0^t X_1 dX_2 - \int_0^t v_1 v_2 ds \tag{3.13}$$

Si v_1 ou v_2 est identiquement égal à 0, nous obtenons la forme ordinaire d'intégration par parties du calcul.

Preuve
La preuve du règle du produit d'Itô sera établi en 3 étapes.

Etape 1
D'abord, supposons par simplicité que $X_1(0) = X_2(0) = 0$, où les u_i, v_i sont indépendants du temps t, $\mathcal{F}_0$-mesurable $(i = 1, 2)$. ALors

$$X_i = u_i t + v_i B_t \qquad (t \geq 0,\ i = 1, 2).$$

On a alors

$$\begin{aligned}\int_0^t X_2 dX_1 + X_1 dX_2 + v_1 v_2 ds &= \int_0^t (X_1 u_2 + X_2 u_1) ds + \int_0^t (X_1 v_2 + X_2 v_1) dB_s \\ &= \int_0^t (u_1 s + v_1 B_s) u_2 + (u_2 s + v_2 B_s) u_1 ds \\ &\quad + \int_0^t (u_1 s + v_1 B_s) v_2 + (u_2 s + v_2 B_s) v_1 dB_s + v_1 v_2 t \\ &= u_1 u_2 t^2 + (v_1 u_2 + v_2 u_1) \Big[\int_0^t B_s ds + \int_0^t s dB_s \Big] \\ &\quad + 2 v_1 v_2 \int_0^t B_s dB_s + v_1 v_2 t\end{aligned}$$

Les exemples précédents montrent que $2\int_0^t B_s d_s = B_t^2 - t$ et $\int_0^t B_s ds + \int_0^t s dB_s = tB_t$. On en déduit alors que

$$\begin{aligned}\int_0^t X_2 dX_1 + X_1 dX_2 + v_1 v_2 ds &= u_1 u_2 t^2 + (v_1 u_2 + v_2 u_1) t B_t + v_1 v_2 B_t^2 \\ &= X_{1,t} X_{2,t}\end{aligned}$$

Etape 2
On suppose que u_i, v_i sont des fonctions élémentaires.
On applique la première étape sur chacun des intervalles $[t_j, t_{j+1}[$, sur lesquels u_i et v_i sont constants, $\mathcal{F}_s$-mesurable et on additionne les expressions intégrales résultantes.

Etape 3
On n'impose de conditions sur u_i et v_i.
On sélectionne des fonctions élémentaires $u_i^n \in \mathbb{L}^1(0, T), v_i^n \in \mathbb{L}^2(0, T)$ tels que lorsque $n \to \infty$ $(i = 1, 2)$

$$\mathbb{E}\Big[\int_0^T |u_i^n - u_i| dt \Big] \to 0$$

$$\mathbb{E}\Big[\int_0^T |v_i^n - v_i|^2 dt \Big] \to 0$$

On applique l'étape 2 au processus X_i^n définit par :

$$X_i^n = X_{i,0} + \int_0^t u_i^n ds + \int_0^t v_i^n dB_s$$

En passant à la limite, on obtient la formule

$$\left[X_1X_2\right]_0^t = \int_0^t X_2dX_1 + X_1dX_2 + v_1v_2ds$$

Avec ce résultat établi, nous sommes prêts maintenant à démontrer la formule d'Itô ou encore le lemme d'Itô (3.1). C'est l'un des principaux résultats de la théorie du calcul stochastique. Ce lemme offre un moyen de manipuler le mouvement brownien ou les solutions d'équations différentielles stochastiques (EDS).

Preuve (Formule d'Itô)
Dans les conditions du théorème (3.1), nous allons établir en trois étapes la formule d'Itô.

Etape 1
On commence par le cas où $g(t,x) = x^m (m \in \mathbb{N})$ on va montrer que

$$d(X^m) = mX^{m-1}dX + \frac{1}{2}m(m-1)X^{m-2}v^2dt \tag{3.14}$$

C'est clair pour $m = 0, 1$, et le cas pour $m = 2$ découle de la règle du produit d'Itô. Supposons la formule est vraie au rang $m-1$,

$$\begin{aligned} d(X^{m-1}) &= (m-1)X^{m-2}dX + \frac{1}{2}(m-1)(m-2)X^{m-3}v^2dt \\ &= (m-1)X^{m-2}(udt + vdB_t) + \frac{1}{2}(m-1)(m-2)X^{m-3}v^2dt \end{aligned}$$

Et nous le prouvons pour m en utilisant la règle du produit d'Itô :

$$\begin{aligned} d(X^m) &= d(XX^{m-1}) \\ &= Xd(X^{m-1}) + X^{m-1}dX + (m-1)X^{m-2}v^2dt \\ &= X\left((m-1)X^{m-2}dX + \frac{1}{2}(m-1)(m-2)X^{m-3}v^2dt\right) \\ &\quad + (m-1)X^{m-2}v^2dt + X^{m-1}dX \\ &= mX^{m-1}dX + \frac{1}{2}m(m-1)X^{m-2}v^2dt \end{aligned}$$

Parce que $m - 1 + \frac{1}{2}(m-1)(m-2) = \frac{1}{2}m(m-1)$. Cela prouve (3.14). Comme la formule d'Itô est valable pour toutes les fonctions $g(x,t) = x^m$, par linéarité de l'opérateur "d", elle est donc valide pour tous les polynômes en x.

Etape 2
Maintenant, supposons que g soit de la forme $g(t,x) = f_1(t)f_2(x)$ où f_1 et f_2 sont des polynômes. Alors

$$\begin{aligned} d(g(t,X_t) &= d(f_1(t)f_2(X_t)) \\ &= f_2(X_t)df_1 + f_1(t)df_2(X_t) \\ &= f_2(X_t)f_1'(t)dt + f_1(t)\big[f_2'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}f_2''(X_t)v^2dt\big] \\ &= \frac{\partial g}{\partial t}dt + \frac{\partial g}{\partial x}dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}v^2dt \end{aligned}$$

ce qui montre la formule d'Itô pour g. Par linéarité, elle est valable pour tout fonction g de la forme.

$$g(t,x) = \sum_{i=1}^{m} f_1^i(t)f_2^i(x)$$

où f_1^i et f_2^i sont des polynômes respectivement en t et en x.

Etape 3
Soit maintenant g vérifiant les conditions de l'énoncé. Il existe une suite de polynômes g^n telle que

$$\begin{array}{cc} g^n \to g & \dfrac{\partial g^n}{\partial t} \to \dfrac{\partial g}{\partial t} \\ \dfrac{\partial g^n}{\partial x} \to \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial^2 g^n}{\partial x^2} \to \dfrac{\partial^2 g^n}{\partial x^2} \end{array}$$

uniformément sur les compacts $[0,T] \times \mathbb{R}$. D'après l'étape 2, on sait que pour tout $t \in [0,T]$, presque surement

$$g^n(t,X_t) - g^n(0,X_0) = \int_0^t \frac{\partial g^n}{\partial s} + \frac{\partial g^n}{\partial x}u + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g^n}{\partial x^2}v^2ds + \int_0^t + \frac{\partial g^n}{\partial x}vdB_s$$

l'argument des dérivées partielles de g^n est (t,X_t). En faisant tendre n vers ∞, on prouve le lemme d'Itô.

3.3 Formule d'Itô en dimension multiple

Nous allons maintenant étendre la formule d'Itô en dimension multiple. Soit $B(t,\omega) = (B_1(t,\omega),...,B_m(t,\omega))$ un mouvement Brownien de dimension m. Si pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$, $u_i(t,\omega)$ et $v_{ij}(t,\omega)$ vérifient les conditions de la définition du processus d'Itô en dimension 1, alors nous avons le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} dX_1 &=& u_1dt + v_{11}dB_1 + \cdots + v_{1m}dB_m \\ \vdots &=& \qquad\qquad \vdots \\ dX_n &=& u_ndt + v_{n1}dB_1 + \cdots + v_{nm}dB_m \end{array} \right.$$

En faisant une simple représentation matricielle, on a

$$dX_t = udt + vdB_t,$$

$$X_t = \begin{pmatrix} X_1(t) \\ \vdots \\ X_n(t) \end{pmatrix},\ u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix},\ v = \begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & \cdots & v_{nm} \end{pmatrix},\ dB_t = \begin{pmatrix} dB_1(t) \\ \vdots \\ dB_m(t) \end{pmatrix} \tag{3.15}$$

Le processus X_t est un processus d'Itô de dimension n ou simplement un processus d'Itô.
Nous demandons maintenant : quel est le résultat de l'application d'une fonction lisse à X ? La réponse est donnée par

Théoreme 3.3 (Formule d'Itô en dimension multiple)
Soit

$$dX_t = udt + vdB_t,$$

un processus d'Itô de dimension n comme défini ci-dessus. Soit $g(t,x) = (g_1(t,x), ..., g_p(t,x))$ une fonction C^2 de $[0,\infty) \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. Alors le processus

$$Y(t,\omega) = g(t, X(t))$$

est aussi un processus d'Itô dont sa k^{ieme} composante est donnée par

$$dY_k = \frac{\partial g_k}{\partial t}(t,X_t)dt + \sum_i \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(t,X_t)dX_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j} \frac{\partial^2 g_k}{\partial x_i \partial x_j}(t,X_t)dX_i dX_j \tag{3.16}$$

où $dB_i dB_j = \delta_{ij}dt, dtdt = dB_i dt = dtdB_i = 0$

La preuve est similaire à la version de la formule d'Itô en dimension 1 (théorème 3.1) et est omise.

Chapitre 4

Équations différentielles stochastiques

4.1 Exemples classiques et quelques méthodes de résolution

Maintenant nous revenons aux solutions possibles $X_t(\omega)$ de l'équation différentielle stochastique.

$$\frac{dX_t}{dt} = b_t(X_t) + \sigma_t(X_t)W_t \qquad b_t(X_t) \in \mathbb{R}, \sigma_t(X_t) \in \mathbb{R} \tag{4.1}$$

où W_t est le "bruit blanc" unidimensionnel. Comme discuté au chapitre 3, l'interprétation d'Itô de (4.1) est que X_t satisfait l'équation d'intégrale stochastique :

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s(X_s)ds + \int_0^t \sigma_s(X_s)dB_s \tag{4.2}$$

ou sous forme différentielle :

$$dX_t = b_t(X_t)dt + \sigma_t(X_t)dB_t \tag{4.3}$$

Donc pour passer de (4.1) à (4.2), on remplace formellement le bruit blanc W_t par $\frac{dB_t}{dt}$ dans (4.1) et multiplier par dt, Il est naturel de demander :

1. Peut-on trouver des théorèmes d'existence et d'unicité de solution pour de telles équations ? Quelles sont les propriétés des solutions ?

2. Comment peut-on résoudre une telle équation donnée ?

Nous traitons d'abord la question (2) en examinant quelques exemples simples, puis dans la section 4.2, nous discuterons de la question (1).

Exemple 4.1 (Modèle de croissance démographique)
Considérons pour commencer l'équation suivante,

$$dX_t = rX_t dt + \alpha X_t dB_t \tag{4.4}$$

On peut voir ce modèle comme un modèle de croissance exponentielle d'une population, de la forme $\frac{dX_t}{dt} = a_t X_t dt$ *avec* X_0 *donné pour lequel le coefficient* $a_t = r + \alpha W_t$ *est le taux de croissance relatif au temps. Il peut arriver que* $a(t)$ *ne soit pas complètement connu, mais soumis à des effets environnementaux aléatoires.* X_t *est la taille de la population,* W *est un bruit blanc,* r *et* α *des constantes.*

En mathématiques financières ce modèle est connu sous le nom de ***modèle de Black-Scholes****. Le terme d'évolution moyen est une croissance à taux constant* r *et le terme stochastique s'apparente à des fluctuations aléatoires dont l'ampleur des variations (la volatilité) est proportionnelle au prix de l'action* X_t*.Le modèle (4.4) se réécrit encore*

$$\frac{dX_t}{X_t} = rdt + \alpha dB_t$$

Ainsi en prenant l'intégrale entre 0 *et* t *des deux membres, on a*

$$\int_0^t \frac{dX_s}{X_s} = rt + \alpha B_t, \qquad car\ B_0 = 0 \tag{4.5}$$

Notre objectif est de trouver X_t*. Pour évaluer l'intégrale du membre de gauche nous utilisons la formule d'Itô pour la fonction :*

$$g(t,x) = \ln x, \qquad x > 0$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned} d(\ln X_t) &= \frac{1}{X_t} dX_t + \frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{X_t^2}\Big)(dX_t)^2 \\ &= \frac{dX_t}{X_t} - \frac{1}{2X_t^2}\alpha^2 X_t^2 dt \\ &= \frac{dX_t}{X_t} - \frac{1}{2}\alpha^2 dt \end{aligned}$$

en prenant l'intégrale entre 0 *et* t *des deux membres et en utilisant (4.5) on a,*

$$\begin{aligned} \int_0^t d(\ln X_s) &= \int_0^t \frac{dX_s}{X_s} - \int_0^t \frac{1}{2}\alpha^2 ds \\ \big[\ln X_s\big]_0^t &= (rt + \alpha B_t) - \frac{1}{2}\alpha^2 t \\ \ln\frac{X_t}{X_0} &= (r - \frac{1}{2}\alpha^2)t + \alpha B_t \end{aligned}$$

ou

$$X_t = X_0 \exp\Big((r - \frac{1}{2}\alpha^2)t + \alpha B_t\Big) \tag{4.6}$$

Pour $\alpha = 0$, on retrouve bien la solution déterministe classique $X_t = X_0 \exp(rt)$. La solution (4.6) est encore appelée **mouvement brownien géométrique**.
Maintenant nous avons trouvé la forme explicite de la solution X_t, cela nous aide à comprendre le comportement de B_t afin d'obtenir des informations sur la solution. On peut faire les remarques suivantes :

1. si $r > \frac{1}{2}\alpha^2$ alors $X_t \to \infty$ quand $t \to \infty$, p.s.

2. si $r < \frac{1}{2}\alpha^2$ alors $X_t \to 0$ quand $t \to \infty$, p.s.

3. si $r = \frac{1}{2}\alpha^2$ alors X_t varie entre de grandes et petites valeurs arbitraires quand $t \to \infty$, p.s.

Exemple 4.2 (Équation de Langevin)
Une approche du mouvement brownien physique, alternative à celle d'Einstein et Smoluchowski, a été initiée en 1908 par Langevin. Elle est plus concrète et est devenue depuis plus répandue. Une manière d'étudier le mouvement est d'écrire les équations de la mécanique pour la particule, en tenant compte du fait qu'elle est soumise à des chocs, qu'on décide de modéliser comme une force aléatoire. Ainsi, si V est la vitesse de la particule brownienne, l'équation du mouvement est d'après le principe fondamental de la dynamique. (on choisit la masse de la particule égale à l'unité)

$$\frac{dV_t}{dt} = -\gamma V_t + L(t) \tag{4.7}$$

Dans l'approche théorique de Langevin, une particule brownienne de masse unitaire, supposée animée à l'instant t d'une vitesse $V(t)$ est soumise à deux forces bien distinctes :

1. *une force de frottement fluide du type $f = -\gamma V$ où γ est une constante positive.*

2. *Une force complémentaire, notée $L(t)$, qui synthétise la résultante des chocs aléatoires des molécules de fluide environnantes.*

L'équation (4.7) s'écrit dans le formalisme d'Itô

$$dV_t = -\gamma V_t dt + \sigma dB_t, \qquad V_0 = v_0 \textit{ et } \gamma, \sigma > 0 \tag{4.8}$$

En multipliant l'équation (4.8) par $e^{\gamma t}$ on trouve

$$e^{\gamma t} dV_t = -\gamma e^{\gamma t} V_t dt + \sigma e^{\gamma t} dB_t$$

En appliquant par ailleurs la formule d'Itô avec

$$g(t, x) = x e^{\gamma t}$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned} d(e^{\gamma t}V_t) &= \gamma e^{\gamma t}V_t dt + e^{\gamma t}dV_t \\ &= (\gamma V_t dt + dV_t)e^{\gamma t} \\ &= \sigma e^{\gamma t}dB_t \end{aligned}$$

en prenant l'intégrale entre 0 *et* t *des deux membres*

$$\begin{aligned} \int_0^t d(e^{\gamma s}V_s) &= \int_0^t \sigma e^{\gamma s}dB_s \\ \left[e^{\gamma s}V_s\right]_0^t &= \int_0^t \sigma e^{\gamma s}dB_s \\ e^{\gamma t}V_t - e^{\gamma 0}v_0 &= \int_0^t \sigma e^{\gamma s}dB_s \\ e^{\gamma t}V_t &= v_0 + \int_0^t \sigma e^{\gamma s}dB_s \end{aligned}$$

en multipliant chaque membre par $e^{-\gamma t}$ *on a*

$$V_t = e^{-\gamma t}v_0 + \int_0^t \sigma e^{-\gamma(t-s)}dB_s \tag{4.9}$$

Ce processus est appelé ***processus d'Ornstein-Ulhenbeck****.*
On voit que V_t *est une somme pondérée de gaussiennes indépendantes, c'est donc une gaussienne. Elle est donc entièrement caractérisée par sa moyenne et sa variance. On a*

$$\mathbb{E}(V_t) = e^{-\gamma t}\mathbb{E}(v_0) \tag{4.10}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(V_t^2) &= \mathbb{E}\left(e^{-2\gamma t}v_0^2 + 2e^{-\gamma t}v_0\int_0^t \sigma e^{-\gamma(t-s)}dB_s + \sigma^2\left(\int_0^t e^{-\gamma(t-s)}dB_s\right)^2\right) \\ &= e^{-2\gamma t}\mathbb{E}(v_0^2) + 2e^{-\gamma t}\mathbb{E}(v_0)\mathbb{E}\left(\int_0^t \sigma e^{-\gamma(t-s)}dB_s\right) + \sigma^2\int_0^t e^{-2\gamma(t-s)}ds \\ &= e^{-2\gamma t}\mathbb{E}(v_0^2) + \frac{\sigma^2}{2\gamma}(1-e^{-2\gamma t}) \end{aligned}$$

Ainsi la variance,

$$\mathbb{V}ar(V_t) = \mathbb{E}(V_t^2) - (\mathbb{E}(V_t))^2 \tag{4.11}$$

est donnée par

$$\mathbb{V}ar(V_t) = e^{-2\gamma t}\mathbb{V}(v_0) + \frac{\sigma^2}{2\gamma}(1-e^{-2\gamma t}) \tag{4.12}$$

Supposons bien sûr $\mathbb{V}ar(v_0) < \infty$*. Pour toute condition initiale* V_0 *on a donc pour* $t \to \infty$

$$\begin{cases} \mathbb{E}(V_t) & \to & 0 \\ \mathbb{V}ar(V_t) & \to & \dfrac{\sigma^2}{2\gamma} \end{cases}$$

De la forme explicite de la solution, nous voyons que la distribution de V_t se rapproche de $\mathcal{N}(0, \dfrac{\sigma^2}{2\gamma})$ quant $t \to \infty$. Nous interprétons cela comme signifiant qu'indépendamment de la distribution initiale, la solution EDS pour un grand temps "s'installe" dans une distribution gaussienne dont la variance $\dfrac{\sigma^2}{2\gamma}$ représente un équilibre entre la force perturbatrice aléatoire $\sigma L(.)$ et la force d'amortissement de frottement $-\gamma V(.)$.

4.2 Existence et unicité de solution

On a indiqué dans la section précédente comment on pouvait en pratique calculer la solution de certaines EDS. En fait, concernant les conditions d'existence d'une solution sur un intervalle $[0;T]$ avec la condition initiale $X_0 = Z$, une variable aléatoire fixée de variance finie et indépendante de B, celles ci sont de même nature que ce qu'on rencontre dans le cas déterministe :

Théoreme 4.1
Pour l'équation $dX_t = b_t(X_t)dt + \sigma_t(X_t)dB_t$ avec $X_0 = Z$, indépendant de B, on aura une unique solution continue en t, adaptée à $\mathcal{F}_t^Z$, avec $\mathcal{F}_t^Z = \sigma(\{B_s; s \leqslant t\} \cup \{Z\})$ et telle que $\mathbb{E}\big[\int_0^T X_t^2 dt\big] < \infty$ dès lors qu'il existe des constantes C et D telles que

$$|b_t(x)| + |\sigma_t(x)| \leq C(1 + |x|) \tag{4.13}$$

$$|b_t(x) - b_t(y)| + |\sigma_t(x) - \sigma_t(y)| \leq D|x - y| \tag{4.14}$$

Preuve
Voir [11], page 67 à 70

Conclusion

L'étude approfondie de l'intégrale stochastique, avec un accent particulier sur l'intégrale d'Itô, a dévoilé la richesse des outils mathématiques nécessaires pour modéliser avec précision les phénomènes aléatoires. Ce mémoire a permis d'approfondir notre compréhension des processus aléatoires en développant des méthodes sophistiquées d'analyse et de description.

L'intégrale d'Itô a, sans conteste, émergé comme un instrument inestimable, applicable dans divers domaines tels que la finance quantitative, l'ingénierie et la physique des particules. En facilitant la modélisation de mouvements browniens et d'autres processus stochastiques, elle a apporté une contribution significative à la compréhension des systèmes dynamiques sous incertitude.

Nos investigations ont souligné l'importance cruciale de maîtriser des concepts fondamentaux tels que le calcul stochastique, les martingales, et les équations différentielles stochastiques. Ces éléments constituent la base sur laquelle repose l'intégrale d'Itô, et une compréhension approfondie de ces notions est essentielle pour aborder des problèmes plus complexes.

En envisageant l'avenir, plusieurs perspectives stimulantes s'ouvrent à nous. L'exploration d'extensions et de généralisations de l'intégrale d'Itô pour des classes plus larges de processus stochastiques est une piste prometteuse. De plus, une application plus approfondie de l'intégrale d'Itô à des problèmes spécifiques, tels que la modélisation financière, la biologie mathématique, ou la physique, pourrait ouvrir des horizons nouveaux et passionnants.

La recherche de liens avec d'autres domaines mathématiques, tels que la théorie de la mesure stochastique ou la géométrie différentielle stochastique, représente une avenue intrigante pour approfondir notre compréhension. Enfin, la diffusion des résultats de cette recherche dans des contextes éducatifs et de vulgarisation pourrait contribuer à rendre ces concepts complexes plus accessibles, démocratisant ainsi ces idées auprès d'un public plus large.

Bibliographie

[1] V. Bénézech, P. Bouafia, *Équations différentielles stochastiques en dimension finie et infinie.*

[2] N. Berglund, *Introduction aux intégrales stochastiques*, Marseille, 2003.

[3] S. Bonnabel, *Mouvement brownien et intégrale d'Itô*, Mines ParisTech, CAOR, 2012.

[4] T. Chonavel, *Équations différentielles stochastiques*, Notes de cours, Filière 4, 2013.

[5] T. Chonavel, *Statistical Signal Processing*, Springer, 2002.

[6] L. C. Evans , *An Introduction to Stochastic Differential Equations*, version 1.2, Departement of Mathematics UC Berkeley.

[7] A. Gazagnes, *Latex pour le prof de maths !*, IREM, Lyon, 2017.

[8] F. Godet, *Intégrale stochastique*, notes de cours, 2006.

[9] A. Lambert, *Théorie de la mesure*, Université Pierre et Marie Curie, Licence de Mathématiques L3.

[10] E. Luirard, *La naissance des Équations Différentielles Stochastiques :* Itô et Dublin, Centre Henri Lebesgue.

[11] B. Øksendal, *Stochastic Differential Equations : An Introduction with Applications*, Fifth Edition, Corrected Printing, Springer-Verlag Heidelberg, New York, 2000.

[12] S. M. Ross, *Initiation aux probabilités*, 4e édition, 1987.

[13] D. W. Stroock, S.R.S Varadhan, *Multidimensional Diffusion Process*, 1979.

[14] K. Valmont, *Contrôle Optimal Stochastique avec application à la propagation de l'e-rumeur*, thèse de doctorat, Université des Antilles, 2019.